BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2009

МНОГОМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

М.А.КУЛИЕВ, И.Г.АЛХАЗОВА
Бакинский Государственный Университет

В работе рассматривается вопрос разрешимости обратных краевых задач для систем параболических уравнений в ограниченной области. Предлагается метод, который основан на сведении обратной краевой задачи к некоторым нелинейным бесконечным системам дифференциальных уравнений. Следует заметить, что данный метод позволяет доказать теоремы существования, устойчивости и единственности решения многомерных обратных краевых задач в классах функций конечной гладкости.

В работе рассматривается вопрос разрешимости обратных краевых задач для систем параболических уравнений в ограниченной области.

Предлагается метод, который основан на сведении обратной краевой задачи к некоторым нелинейным бесконечным системам дифференциальных уравнений. Следует заметить, что данный метод позволяет доказать теоремы существования, устойчивости и единственности решения многомерных обратных краевых задач в классах функций конечной гладкости.

В области $Q_T = D\times(0,T)$ рассматривается следующая задача:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - Au(x,t) = a(x)u(x,t) + b(x)v(x,t) + f(x,t), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - Av(x,t) = \widetilde{a}(x)u(x,t) + \widetilde{b}(x)v(x,t) + g(x,t), \qquad (2)$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ v(x,0) = \psi(x),\ x\in\overline{D}, \qquad (3)$$

$$u(x',t) = F(x',t),\ v(x',t) = G(x',t)\ (x',t)\in\Gamma = S\times(0,T), \qquad (4)$$

$$u(x,T) = h(x), v(x,T) = q(x),\ x\in\overline{D}, \qquad (5)$$

где D - ограниченная область в $R^n, S=\partial D\in C^2, n\le 3$,

$$Au = \sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j}, a_{ij}(x) = a_{ji}(x)\in C^4(\overline{D}),\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \ge \mu_0|\xi|^2,$$

$\varphi(x),\psi(x), f(x,t), g(x,t), F(x,t), G(x,t), h(x), q(x)$ - заданные, а $a(x), b(x)$, $\widetilde{a}(x),\widetilde{b}(x)$, - искомые функции.

Определение. Систему $\{u(x,t), v(x,t),\ a(x), b(x),\ \widetilde{a}(x), \widetilde{b}(x)\}$ назовем решением задачи (1)-(5), если они удовлетворяют следующим условиям:

1. Функции $a(x), b(x),\ \widetilde{a}(x), \widetilde{b}(x)\} \in W_2^2(D)$.
2. $u(x,t), v(x,t) u_{tt}(x,t), v_{tt}(x,t), u_{x_i}(x,t), v_{x_i}(x,t)\ \ (i=\overline{1,n})$,

   $u_{x_i x_j t}, v_{x_i x_j t}\ \ (i,j=\overline{1,n}),\ u_{t+x_i}, v_{t+x_i}\ \ (i=\overline{1,n}) \in L_2(Q_T)$.
3. Условия (1)-(5) удовлетворяются в обычном смысле.

Предположим, что функции $\varphi(x), \psi(x), f(x,t), g(x,t), F(x,t), G(x,t), h(x), q(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1. $f(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)\cos\lambda_k t, f_k(x) = \dfrac{2}{T}\int\limits_0^T f(x,t)\cos\lambda_k t dt$, где $\lambda_k = \dfrac{k\pi}{T}, T \neq 2k\pi, k = 0,1,\ldots;$

   $f(x,t), f_{x_i x_j}(x,t)\ \ (i,j=\overline{1,n}),\ f_{tt}(x,t), f_{x_i x_j t}(x,t)\ \ (i,j=\overline{1,n}) \in L_2(Q_T)$,

   $f_t(x,t)\big|_{t=0} = f_t(x,t)\big|_{t=T} = 0,\ \ f(x,0) \neq f(x,T), \forall x \in D$.
2. $g(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k(x)\cos\lambda_k t, g_k(x) = \dfrac{2}{T}\int\limits_0^T g(x,t)\cos\lambda_k t dt$,

   $g(x,t), g_{x_i x_j}(x,t)\ (i,j=1,n), g_{tt}(x,t), g_{x_i x_j t}(x,t)\ (i,j=1,n) \in L_2(Q_T)$,

   $g_t(x,t)\big|_{t=0} = g_t(x,t)\big|_{t=T} = 0,\ \ g(x,0) \neq g(x,T), \forall x \in D$.
3. $F(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} F_k(x)\cos\lambda_k t, F_k(x) = \dfrac{2}{T}\int\limits_0^T F(x,t)\cos\lambda_k t dt,$

   $F(x,t) \in L_2(0,T;W_2^{11/2}(s),\ F_{tt}(x,t) \in L_2(0,T;W_2^{9/2}(s))$,

   $F_{ttt}(x,t) \in L_2(0,T;W_2^{7/2}(s)),\ F_t(x,t)\big|_{t=0} = F_t(x,t)\big|_{t=T} = 0,\ \ \forall x \in S$.
4. $G(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} G_k(x)\cos\lambda_k t, G_k(x) = \dfrac{2}{T}\int\limits_0^T G(x,t)\cos\lambda_k t dt,$

   $G(x,t) \in L_2(0,T;W_2^{11/2}(s),\ G_{tt}(x,t) \in L_2(0,T;W_2^{9/2}(s))$,

   $G_{ttt}(x,t) \in L_2(0,T;W_2^{7/2}(s)),\ G_t(x,t)\big|_{t=0} = G_t(x,t)\big|_{t=T} = 0,\ \ \forall x \in S$.
5. $\varphi(x), h(x), \psi(x), q(x) \in W_2^4(D),\ F(x',0) = \varphi(x'), F(x',T) = h(x'),$

   $G(x',0) = \psi(x'), G(x',T) = q(x),\ x' \in S$.
6. $|\Delta(x)| = |\varphi(x)q(x) - \psi(x)h(x)| \geq \delta > 0$.

Пусть

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}(u_k(x)\cos\lambda_k t + \widetilde{u}_k(x)\sin\lambda_k t), v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}(v_k(x)\cos\lambda_k t + $$
$$+ \widetilde{v}_k(x)\sin\lambda_k t).$$

Тогда из задачи (1)-(5) при условиях 1-6 имеем следующую задачу:

$$-\lambda_k u_k(x) - A\widetilde{u}_k(x) = \frac{1}{\Delta(x)}\left\{q(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \lambda_k \widetilde{u}_k(x) - \psi(x)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k \widetilde{u}_k(x) + \right.$$

$$\left. + \Phi_1(x)\right\}\widetilde{u}_k(x) + \frac{1}{\Delta(x)}\left\{\varphi(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \lambda_k \widetilde{u}_k(x) - h(x)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k \widetilde{u}_k(x) + \Phi_2(x)\right\}\widetilde{v}_k(x),$$

$$\lambda_k \widetilde{u}_k(x) - Au_k(x) = \frac{1}{\Delta(x)}\left\{q(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \lambda_k \widetilde{u}_k(x) - \psi(x)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k \widetilde{u}_k(x) + \Phi_1(x)\right\}u_k(x) +$$

$$+ \frac{1}{\Delta(x)}\left\{\varphi(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \lambda_k \widetilde{u}_k(x) - h(x)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k \widetilde{u}_k(x) + \Phi_2(x)\right\}v_k(x) + f_k(x),$$

$$\lambda_k v_k(x) - A\widetilde{v}_k(x) = \frac{1}{\Delta(x)}\left\{q(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \lambda_k \widetilde{v}_k(x) - \psi(x)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k \widetilde{v}_k(x) + \Phi_3(x)\right\}\widetilde{u}_k(x) +$$

$$+ \frac{1}{\Delta(x)}\left\{\varphi(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \lambda_k \widetilde{v}_k(x) - h(x)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k \widetilde{v}_k(x) + \Phi_4(x)\right\}\widetilde{v}_k(x),$$

$$\lambda_k \widetilde{v}_k(x) - Av_k(x) = \frac{1}{\Delta(x)}\left\{q(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \lambda_k \widetilde{v}_k(x) - \psi(x)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k \widetilde{v}_k(x) + \Phi_3(x)\right\}u_k(x) +$$

$$+ \frac{1}{\Delta(x)}\left\{\varphi(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \lambda_k \widetilde{v}_k(x) - h(x)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k \widetilde{v}_k(x) + \Phi_4(x)\right\}v_k(x) + g_k(x)\,, \tag{6}$$

$$\widetilde{u}_k(x)\big|_s = 0, u_k(x)\big|_s = F_k(x)\big|_s, \widetilde{v}_k(x)\big|_s = 0,\ v_k(x)\big|_s = G_k(x)\big|_s,\ \ k = 0,1,2,\ldots, \tag{7}$$

где

$$\Phi_1(x) = -q(x)(Ah(x) + f(x,T)) + \psi(x)(A\varphi(x) + f(x,0)),$$
$$\Phi_2(x) = -\varphi(x)(Ah(x) + f(x,T)) + h(x)(A\varphi(x) + f(x,0)),$$
$$\Phi_3(x) = -q(x)(A\psi(x) + g(x,0)) + \psi(x)(Aq(x) + g(x,T)),$$
$$\Phi_4(x) = -\varphi(x)(Aq(x) + g(x,T)) + h(x)(A\psi(x) + g(x,0)),$$
$$f_k(x) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x,\tau)\cos\lambda_k\tau d\tau, g_k(x) = \frac{2}{T}\int_0^T g(x,\tau)\cos\lambda_k\tau d\tau\,.$$

Лемма 1. Пусть $u_k(x), \widetilde{u}_k(x), v_k(x), \widetilde{v}_k(x)$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ - решение задачи (6),(7) из класса

$$\int_D \sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\lambda_k^4\right)\Big[\left|\nabla u_k(x)\right|^2 + \left|\nabla \widetilde{u}_k(x)\right|^2 + \left|\nabla v_k(x)\right|^2 + \left|\nabla \widetilde{v}_k(x)\right|^2 +$$
$$+ \left|u_k(x)\right|^2 + \left|\widetilde{u}_k(x)\right|^2 + \left|v_k(x)\right|^2 + \left|\widetilde{v}_k(x)\right|^2 + \left|\Delta u_k(x)\right|^2 + \left|\Delta \widetilde{u}_k(x)\right|^2 +$$
$$+ \left|\Delta v_k(x)\right|^2 + \left|\Delta \widetilde{v}_k(x)\right|^2\Big]dx < +\infty\,.$$

Тогда функции

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}(u_k(x)\cos\lambda_k t + \widetilde{u}_k(x)\sin\lambda_k t), v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}(v_k(x)\cos\lambda_k t +$$

$$+\tilde{v}_k(x)\sin\lambda_k t),$$

$$a(x)=\frac{1}{\Delta}\left\{q(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\lambda_k\tilde{u}_k(x)-\psi(x)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\tilde{u}_k(x)+\Phi_1(x)\right\},$$

$$b(x)=\frac{1}{\Delta}\left\{\varphi(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\lambda_k\tilde{u}_k(x)-h(x)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\tilde{u}_k(x)+\Phi_2(x)\right\},$$

$$\tilde{a}(x)=\frac{1}{\Delta}\left\{q(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\lambda_k\tilde{v}_k(x)-\psi(x)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\tilde{v}_k(x)+\Phi_3(x)\right\},$$

$$\tilde{b}(x)=\frac{1}{\Delta}\left\{\varphi(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\lambda_k\tilde{v}_k(x)-h(x)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\tilde{v}_k(x)+\Phi_4(x)\right\}$$

является решением обратной задачи (1)-(5).

Доказательство леммы 1 следует из предположения в разрешимости задачи (6),(7) из указанного класса и из того, что

$$u(x,0)=\varphi(x), u(x,T)=h(x), v(x,0)=\psi(x), v(x,T)=q(x). \tag{8}$$

Теперь установим разрешимость задачи (6),(7). Определим функции $æ_k(x),\tilde{æ}_k(x)$ следующим образом

$$Aæ_k(x)=0, æ_k(x)=F_k(x),\ x\in s, \tag{9}$$

$$A\tilde{æ}_k(x)=0, \tilde{æ}_k(x)=G_k(x),\ x\in s, \tag{10}$$

$$\|æ_k(x)\|_{C(\bar{D})}\le C_2\|F_k(x)\|_{W_2^{1/2}(s)}, \|\tilde{æ}_k(x)\|_{C(\bar{D})}=C_2\|G_k(x)\|_{W_2^{1/2}(s)}.$$

Для разрешимости задачи (6),(7) применим метод последовательных приближений:

$$-\lambda_k u_k^{(m)}(x)-A\tilde{u}_k^{(m)}(x)=\frac{\tilde{u}_k^{(m-1)}(x)}{\Delta(x)}\left\{q(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\lambda_k\tilde{u}_k^{(m-1)}(x)-\right.$$

$$\left.-\psi(x)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\tilde{u}_k^{(m-1)}(x)+\Phi_1(x)\right\}+\frac{v_k^{(m-1)}(x)}{\Delta(x)}\left\{\varphi(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\lambda_k\tilde{u}_k^{(m-1)}(x)-\right.$$

$$\left.-h(x)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\tilde{u}_k^{(m-1)}(x)+\Phi_2(x)\right\}+\lambda_k æ_k(x),$$

$$-\lambda_k\tilde{u}_k^{(m)}(x)-Au_k^{(m)}(x)=\frac{u_k^{(m-1)}(x)+æ_k(x)}{\Delta(x)}\left\{q(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\lambda_k\tilde{u}_k^{(m-1)}(x)-\right.$$

$$\left.-\psi(x)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\tilde{u}_k^{(m-1)}(x)+\Phi_1(x)\right\}+\frac{\tilde{v}_k^{(m-1)}(x)+\tilde{æ}_k(x)}{\Delta(x)}\left\{\varphi(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\lambda_k\tilde{u}_k^{(m-1)}(x)-\right.$$

$$\left.-h(x)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\tilde{u}_k^{(m-1)}(x)+\Phi_2(x)\right\}+f_k(x),$$

$$-\lambda_k v_k^{(m)}(x) - A\widetilde{v}_k^{(m)}(x) = \frac{\widetilde{u}_k^{(m-1)}(x)}{\Delta(x)}\Big\{q(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \lambda_k \widetilde{v}_k^{(m-1)}(x) -$$

$$-\psi(x)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k \widetilde{v}_k^{(m-1)}(x) + \Phi_3(x)\Big\} + \frac{\widetilde{v}_k^{(m-1)}(x)}{\Delta(x)}\Big\{\varphi(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \lambda_k \widetilde{v}_k^{(m-1)}(x) -$$

$$-h(x)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k \widetilde{v}_k^{(m-1)}(x) + \Phi_4(x)\Big\} + \lambda_k \widetilde{æ}_k(x),$$

$$-\lambda_k \widetilde{v}_k^{(m)}(x) - A v_k^{(m)}(x) = \frac{u_k^{(m-1)}(x) + æ_k(x)}{\Delta(x)}\Big\{q(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \lambda_k \widetilde{v}_k^{(m-1)}(x) -$$

$$-\psi(x)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k \widetilde{v}_k^{(m-1)}(x) + \Phi_3(x)\Big\} + \frac{v_k^{(m-1)}(x) + \widetilde{æ}_k(x)}{\Delta(x)}\Big\{\varphi(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \lambda_k v_k^{(m-1)}(x) -$$

$$-h(x)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k \widetilde{v}_k^{(m-1)}(x) + \Phi_4(x)\Big\} + g_k(x), \tag{11}$$

$$u_k^{(m)}(x)\Big|_s = 0, \widetilde{u}_k^{(m)}(x)\Big|_s = 0, v_k^{(m)}(x)\Big|_s = 0, \widetilde{v}_k^{(m)}(x)\Big|_s = 0\ ;$$

$$k = 0,1,2,\ldots;\ m = 0,1,2,\ldots\ . \tag{12}$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия 1-6 и

$$N_0^2(1+2C_1^2)\frac{80\varepsilon_0}{\mu_0}\cdot\frac{|D|}{T}\int_0^T\Big(\|F(x,t)\|^2_{W_2^{7/2}(s)} + \|G(x,t)\|^2_{W_2^{7/2}(s)} + \|F_{tt}(x,t)\|^2_{W_2^{7/2}(s)} +$$

$$+\|G_{tt}(x,t)\|^2_{W_2^{7/2}(s)}\Big)dt + \frac{40\varepsilon_0 N_0^2}{\mu_0} + \frac{640N_0^2C_1^2C_3^4\varepsilon_0^{\frac{8-n}{2}}}{\mu_0^2}\cdot\Big[\frac{|D|}{T}(1+N_0)^2\int_0^T\Big(\|F_t(x,t)\|^2_{W_2^{7/2}(s)} +$$

$$+\|G_t(x,t)\|^2_{W_2^{7/2}(s)} + \|F_{ttt}(x,t)\|^2_{W_2^{7/2}(s)} + \|G_{ttt}(x,t)\|^2_{W_2^{7/2}(s)}\Big)dt +$$

$$+\|f(x,t)\|^2_{L_2(Q_T)} + \|g(x,t)\|^2_{L_2(Q_T)} + \|f_{tt}(x,t)\|^2_{L_2(Q_T)} + \|g_{tt}(x,t)\|^2_{L_2(Q_T)}\Big] = K(\mu_0) < \frac{1}{2}.$$

Тогда для последовательных приближений, определяемых с помощью (11), (12), из класса

$$\int_D\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\lambda_k^4\right)\Big[\left|\nabla u_k^{(m)}(x)\right|^2 + \left|\nabla\widetilde{u}_k^{(m)}(x)\right|^2 + \left|\nabla v_k^{(m)}(x)\right|^2 + \left|\nabla\widetilde{v}_k^{(m)}(x)\right|^2 +$$

$$+\left|Au_k^{(m)}(x)\right|^2 + \left|A\widetilde{u}_k^{(m)}(x)\right|^2 + \left|Av_k^{(m)}(x)\right|^2 + \left|A\widetilde{v}_k^{(m)}(x)\right|^2\Big]dx < \infty$$

справедливы оценки:

$$\int_D\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\lambda_k^4\right)\Big[\left|\nabla u_k^{(m)}(x)\right|^2 + \left|\nabla\widetilde{u}_k^{(m)}(x)\right|^2 + \left|\nabla v_k^{(m)}(x)\right|^2 + \left|\nabla\widetilde{v}_k^{(m)}(x)\right|^2\Big]dx \le$$

$$\le (1+N_0)^2\,\frac{80z_0}{\mu_0}\cdot\frac{|D|}{T}\int_0^T\Big(\|F_t(x,t)\|^2_{W_2^{1/2}(s)}+\|G_t(x,t)\|^2_{W_2^{1/2}(s)}+\|F_{ttt}(x,t)\|^2_{W_2^{1/2}(s)}+$$

$$+\|G_{ttt}(x,t)\|^2_{W_2^{1/2}(s)}\Big)dt+\frac{20z_0}{\mu_0}\cdot\Big(\|f(x,t)\|^2_{L_2(Q_T)}+\|g(x,t)\|^2_{L_2(Q_T)}+\|f_{tt}(x,t)\|^2_{L_2(Q_T)}+$$

$$+\|g_{tt}(x,t)\|^2_{L_2(Q_T)}\Big)=\frac{\gamma}{\mu_0},$$

$$\int_D\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\lambda_k^4\right)\Big[\left|Au_k^{(m)}(x)\right|^2+\left|A\widetilde{u}_k^{(m)}(x)\right|^2+\left|Av_k^{(m)}(x)\right|^2+\left|A\widetilde{v}_k^{(m)}(x)\right|^2\Big]dx\le$$

$$\le 20N_0^2\Big[1+C_1^2\cdot\frac{2}{T}\Big(\|F(x,t)\|^2_{W_2^{1/2}(s)}+\|G(x,t)\|^2_{W_2^{1/2}(s)}+\|F_{tt}(x,t)\|^2_{W_2^{1/2}(s)}+$$

$$+\|G_{tt}(x,t)\|^2_{W_2^{1/2}(s)}\Big)\Big]\frac{\gamma}{\mu_0}+16N_0^2C_1^2C_3^4\cdot z_0^{\frac{4-n}{2}}\cdot\frac{\gamma^2}{\mu_0^2}+40(1+N_0)^2\cdot\frac{|D|}{T}\int_0^T\Big(\|F_t(x,t)\|^2_{W_2^{1/2}(s)}+$$

$$+\|G_t(x,t)\|^2_{W_2^{1/2}(s)}+\|F_{ttt}(x,t)\|^2_{W_2^{1/2}(s)}+\|G_{ttt}(x,t)\|^2_{W_2^{1/2}(s)}\Big)dt+$$

$$+20\Big(\|f(x,t)\|^2_{L_2(Q_T)}+\|G(x,t)\|^2_{L_2(Q_T)}+\|f_{tt}(x,t)\|^2_{L_2(Q_T)}+\|G_{ttt}(x,t)\|^2_{L_2(Q_T)}\Big)=C(\gamma),$$

где

$$C_1^2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_k^2}{1+\lambda_k^4},\quad C_2:\|y\|_{C(D)}\le C_2\|y\|_{W_2^2(D)},$$

$$C_3:\|y\|_{L^4(D)}\le C_3\|y\|^{\frac{n}{4}}_{W_2^1(D)}\cdot\|y\|^{\frac{4-n}{4}}_{L_2(D)},$$

$$N_0=\left\{\left\|\frac{h(x)}{\Delta(x)}\right\|_{C(\overline{D})},\left\|\frac{q(x)}{\Delta(x)}\right\|_{C(\overline{D})},\left\|\frac{\varphi(x)}{\Delta(x)}\right\|_{C(\overline{D})},\left\|\frac{\psi(x)}{\Delta(x)}\right\|_{C(\overline{D})},\right.$$

$$\left.\left\|\frac{\Phi_1(x)}{\Delta(x)}\right\|_{C(\overline{D})},\left\|\frac{\Phi_2(x)}{\Delta(x)}\right\|_{C(\overline{D})},\left\|\frac{\Phi_3(x)}{\Delta(x)}\right\|_{C(\overline{D})},\left\|\frac{\Phi_4(x)}{\Delta(x)}\right\|_{C(\overline{D})}\right\};$$

$0\ne\dfrac{1}{z_0}$ - наименьшее собственное число задачи $\Delta u=-\dfrac{1}{z^2}u,\ u\big|_s=0$.

Доказательство. Из (11) и (12) следует, что

$$\int_D\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\lambda_k^4\right)\Big[\left|\nabla u_k^{(m)}(x)\right|^2+\left|\nabla\widetilde{u}_k^{(m)}(x)\right|^2+\left|\nabla v_k^{(m)}(x)\right|^2+\left|\nabla\widetilde{v}_k^{(m)}(x)\right|^2\Big]dx\le$$

$$\le\frac{40z_0}{\mu_0^2}\int_D\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\lambda_k^4\right)\left(\left|f_k(x)\right|^2+\left|g_k(x)\right|^2\right)dx+$$

$$+40\,\frac{(1+N_0^2)z_0}{\mu_0^2}\int_D\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\lambda_k^4\right)\lambda_k^2\left(\left|æ_k(x)\right|^2+\left|\widetilde{æ}_k(x)\right|^2\right)dx+$$

$$+\frac{160N_0^2 z_0^2}{\mu_0^2}\left[1+2C_1^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\lambda_k^4\right)\left(\left|æ_k(x)\right|^2_{C(\overline{D})}+\left|\widetilde{æ}_k(x)\right|^2_{C(\overline{D})}\right)\right]\times$$

$$\times\int_D\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\lambda_k^4\right)\left(\left|\nabla u_k^{(m-1)}(x)\right|^2+\left|\nabla\widetilde{u}_k^{(m-1)}(x)\right|^2+\left|\nabla v_k^{(m-1)}(x)\right|^2+\left|\nabla\widetilde{v}_k^{(m-1)}(x)\right|^2\right)dx+$$

$$+320\frac{N_0^2C_1^2C_3^4\cdot z_0^{\frac{6-n}{2}}}{\mu_0^2}\left[\int_D\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\lambda_k^4\right)\left(\left|\nabla u_k^{(m-1)}(x)\right|^2+\left|\nabla\widetilde{u}_k^{(m-1)}(x)\right|^2+\left|\nabla v_k^{(m-1)}(x)\right|^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|\nabla\widetilde{v}_k^{(m-1)}(x)\right|^2\right)dx\right]^2.$$

Отсюда получаем первое утверждение из леммы 2. Используя первую оценку из (11), (12) следует вторая оценка.

Лемма 3. Пусть выполнены условия леммы 2. тогда для последовательных приближений, определяемых (11), (12) из класса, указанного в лемме 2, справедлива оценка

$$\int_D\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\lambda_k^4\right)\left[\left|\nabla(u_k^{(m)}(x)-u_k^{(m-1)}(x))\right|^2+\left|\nabla(\widetilde{u}_k^{(m)}(x)-\widetilde{u}_k^{(m-1)}(x))\right|^2+\right.$$

$$+\left|\nabla(v_k^{(m)}(x)-v_k^{(m-1)}(x))\right|^2+\left|\nabla(\widetilde{v}_k^{(m)}(x)-\widetilde{v}_k^{(m-1)}(x))\right|^2+$$

$$+\left|A(u_k^{(m)}(x)-u_k^{(m-1)}(x))\right|^2+\left|A(\widetilde{u}_k^{(m)}(x)-\widetilde{u}_k^{(m-1)}(x))\right|^2+$$

$$\left.+\left|A(v_k^{(m)}(x)-v_k^{(m-1)}(x))\right|^2+\left|A(\widetilde{v}_k^{(m)}(x)-\widetilde{v}_k^{(m-1)}(x))\right|^2\right]dx\le const\, p^m,\ p<1.$$

Доказательство леммы 3, аналогично доказательству леммы 2.

Лемма 4. Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда существует единственное решение задачи (6), (7), для которого справедливы оценки

$$\int_D\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\lambda_k^4\right)\left[\left|\nabla u_k(x)\right|^2+\left|\nabla\widetilde{u}_k(x)\right|^2+\left|\nabla v_k(x)\right|^2+\left|\nabla\widetilde{v}_k(x)\right|^2\right]dx\le\frac{\gamma}{\mu_0},$$

$$\int_D\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\lambda_k^4\right)\left[\left|Au_k(x)\right|^2+\left|A\widetilde{u}_k(x)\right|^2+\left|Av_k(x)\right|^2+\left|A\widetilde{v}_k(x)\right|^2\right]dx=C(\gamma).$$

Доказательство. Если мы докажем, что при каждом фиксированном m задача (11), (12) однозначно разрешима из класса, указанного в лемме 2, то доказательство леммы 4 будет следовать из леммы 2,3.

При $m=0$ задача (11), (12) переходит в задачу

$$-\lambda_k u_k^{(0)}(x)-A\widetilde{u}_k^{(0)}(x)=\lambda_k æ_k(x),$$

$$-\lambda_k\widetilde{u}_k^{(0)}(x)-Au_k^{(0)}(x)=\frac{æ_k(x)}{\Delta(x)}\Phi_1(x)+\frac{\widetilde{æ}_k(x)}{\Delta(x)}\Phi_2(x)+f_k(x), \tag{13}$$

$$-\lambda_k u_k^{(0)}(x)-A\widetilde{u}_k^{(0)}(x)=\lambda_k æ_k(x),$$

$$-\lambda_k\widetilde{v}_k^{(0)}(x)-Av_k^{(0)}(x)=\frac{æ_k(x)}{\Delta(x)}\Phi_3(x)+\frac{\widetilde{æ}_k(x)}{\Delta(x)}\Phi_4(x)+g_k(x), \tag{14}$$

$$u_k^{(0)}(x)\Big|_s = 0,\ \widetilde{u}_k^{(0)}(x)\Big|_s = 0,\ v_k^{(0)}(x)\Big|_s = 0,\ \widetilde{v}_k^{(0)}(x)\Big|_s = 0. \tag{15}$$

Докажем разрешимость задачи (13), (15), используя метод Галеркина. Приближенное решение ищем в виде

$$u_k^{(0),(l)}(x) = \sum_{m=1}^{l} C_m^{(l)} g_m(x), \qquad \widetilde{u}_k^{(0),(l)}(x) = \sum_{m=1}^{l} C_{1,m}^{(l)} g_m(x),$$

где $Ag_m(x) = -\eta_m^2 g_m(x),\ \ g_m(x)\big|_s = 0$.

$C_m^{(l)}, C_{1,m}^{(l)}$ определяются из системы алгебраических уравнений

$$\int_D \left(-\lambda_k u_k^{(0),(l)}(x) g_m(x) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{k,x_i}^{(0),(l)}(x) g_{mx_j}(x) \right) dx = \int_D \lambda_k æ_k(x) g_m(x) dx,$$

$$\int_D \left(\lambda_k \widetilde{u}_k^{(0),(l)}(x) g_m(x) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{k,x_i}^{(0),(l)}(x) g_{mx_j}(x) \right) dx =$$

$$= \int_D \left(\frac{æ_k(x)}{\Delta(x)} \Phi_1(x) + \frac{\widetilde{æ}_k(x)}{\Delta(x)} \Phi_2(x) + f_k(x) \right) g_m(x) dx,\ \ m = 0,1,2,\dots,$$

которая однозначно разрешима.

Отсюда, стандартным образом, следует разрешимость задачи (13), (15) из указанного класса.

Теперь, если при m определены $u_k^{(m)}(x), \widetilde{u}_k^{(m)}(x)$ из нашего класса, то для определения $u_k^{(m+1)}(x), \widetilde{u}_k^{(m+1)}(x)$ получим задачи (13), (15) с правыми частями $Q_{1,k}(x)$, $Q_{2,k}(x)$, такими, что

$$\int_D \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + \lambda_k^2\right)\left(Q_{1,k}^2(x),\ Q_{2,k}^2(x)\right) dx < +\infty.$$

Применяя метод Галеркина, определим $u_k^{(m+1)}(x), \widetilde{u}_k^{(m+1)}(x)$ из нашего класса. Аналогичным образом можно доказать разрешимость задачи (14), (15) из указанного класса.

Теорема. Пусть выполнены условии 1-6 и

$$K(\mu_0) < \frac{1}{2},$$

$$\mu_0 - [6N_0 + 12N_0 C_1 \sqrt{C_2 C(\gamma)}] > 0.$$

Тогда существует единственное решение обратной задачи (1)-(5), где $N_0, C_1, C_2, K(\mu_0), C(\gamma)$ определены в лемме 2.

Доказательство. Для полной эквивалентности обратной задачи и задачи (6), (7) следует доказать выполнение условий (8).

Пусть $u(x,0) = \widetilde{\varphi}(x), v(x,0) = \widetilde{\psi}(x)$. Тогда для функции $r(x) = \varphi(x) - \widetilde{\varphi}(x)$ и $\widetilde{r}(x) = \psi(x) - \widetilde{\psi}(x)$ из (6), (7) справедливо:

$$Ar(x) = l_1(x)r(x) + l_2(x)\tilde{r}(x)$$
$$A\tilde{r}(x) = l_3(x)r(x) + l_4(x)\tilde{r}(x)$$
$$r(x)\big|_s = 0, \quad \tilde{r}(x)\big|_s = 0 \,,$$

где $\|l_i(x)\|_{C(\bar{D})} \le N_0 + 2N_0C_1\sqrt{C_2C(\gamma)}$, $(i = \overline{1,4})$.

Отсюда, в силу условий теоремы, следует, что $r(x) \equiv 0, \tilde{r}(x) \equiv 0$. Аналогично доказывается, что $u(x,T) = h(x)$ и $v(x,T) = g(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев А.М., Романов В.Г., Шитатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980, 283 с.
2. Намазов Г.К. Обратные задачи теории уравнений математической физики. Баку: 1984, 128 с.
3. Бубнов Б.А. К вопросу о разрешимости многомерных обратных задач для параболических уравнений. Препринт 714. Новосибирск: 1990, 44 с.
4. Кулиев М.А. Многомерная обратная краевая задача для уравнения параболического типа в ограниченной области. Вестник Бакинского Университета, сер.физ.-матем. наук, 1997 г., №1, с.106-113.

MƏHDUD OBLASTDA ÇOXÖLÇÜLÜ PARABOLİK TƏNLİKLƏR SİSTEMİ ÜÇÜN TƏRS SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

M.Ə.QULİYEV, İ.Q.ALXASOVA

XÜLASƏ

İşdə məhdud oblastda çoxölçülü parabolik tənliklər sistemi üçün tərs məsələnin həllinin varlıq məsələsinə baxılmışdır. Qoyulmuş məsələ klassik olmayan sonsuz diferensial tənliklər sisteminə gətirilmiş, Qalyorkin və ardıcıl yaxınlaşma metodu ilə tərs məsələnin həllinin varlıq və yeganəliyi isbat olunmuşdur.

MULTIDIMENSIONAL INVERSE PROBLEM FOR THE SYSTEM OF PARABOLYC-TYPE EQUATIONS IN RESTRICTED AREAS

M.A.QULIEV, I.Q.ALCHASOVA

SUMMARY

The article views the solution of inverse boundary value problems for the system of parabolic equations in restricted areas. The method based on the inverse boundary value problem to nonlinear infinite differential equation system is suggested in the article. It should be noted that the given method allows to prove the theorem on the existence, stability a uniqueness of the solution of multidimensional inverse boundary value problems in classes of finite smoothness function. Galyerkin and successive approximation methods prove the existence and uniqueness of the solution of inverse problem.